DAS

# FOCALAXENSYSTEM

## EINER FLÄCHE ZWEITER ORDNUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

EINGEREICHT BEI DER

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FACULTÄT

DER

EBERHARD-KARLS-UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON

**L. STOLTE.**

STRASSBURG,

BUCHDRUCKEREI VON R. SCHULTZ & COMP.

(BERGER-LEVRAULT'S Nachf.).

1877.

# Das Focalaxensystem einer Fläche zweiter Ordnung.

Die synthetische Geometrie nennt zwei ebene Systeme $\Sigma$ und $\Sigma'$ reciprok verwandt oder kurz reciprok, sobald jedem Punkte $P$ von $\Sigma$ eine Gerade $p'$ von $\Sigma'$ und jeder Geraden $p$ von $\Sigma$ ein Punkt $P'$ von $\Sigma'$ entspricht. Diese reciproke Beziehung wird zu einer involutorischen, wenn man beide Systeme in der Weise auf einander legt, dass jedem Punkte $A$ $B'$, der sowohl zu $\Sigma$ als $\Sigma'$ zu rechnen ist, dieselbe Gerade $a'b$ in doppelter Weise zugewiesen ist. Fasst man die beiden in einander liegenden Systeme als ein einziges auf, in dem jedem Punkte eine Gerade, jeder Geraden ein zu ihr involutorischer Strahlenbüschel zugeordnet ist, so führt das System den Namen «ebenes Polarsystem». In einem solchen Polarsystem liegt entweder kein Punkt, oder eine ganze Reihe von Punkten auf den ihnen entsprechenden Geraden. Im letzteren Falle bilden alle diese Punkte eine Curve zweiter Ordnung, «die Ordnungscurve des ebenen Polarsystems», welche von den entsprechenden Geraden, «den Ordnungsstrahlen», umhüllt wird. Ist umgekehrt irgend eine Curve zweiter Ordnung gegeben, so kann dieselbe als Ordnungscurve eines ebenen Polarsystems aufgefasst werden, und ist letzteres durch die Curve völlig bestimmt.

Projiciren wir ein ebenes Polarsystem von einem Punkte aus, welcher nicht in seiner Ebene liegt, so erhalten wir «ein polares Bündel». Angenommen, das ebene Polarsystem besitzt eine Ordnungscurve, so haben wir durch Projiciren einen Ordnungskegel. Jedem Strahle durch die Spitze des Kegels ist seine Polarebene in Bezug auf den letzteren zugeordnet. In einem jeden Bündel, vorausgesetzt, es sei kein rechtwinkliger, oder Rotationsbündel, gibt es nur drei, zu einander conjugirte, rechtwinklige, stets reelle Gerade, «die Axen des polaren Bündels»; die drei, die Axen verbindenden Ebenen werden als Symmetrieebenen des Bündels bezeichnet. In jeder der Symmetrieebenen, aber auch nur in ihnen, existiren zwei Gerade von der Beschaffenheit, dass je zwei sich in ihnen schneidende und zu einander conjugirte Ebenen auf einander rechtwinklig stehen. Diese Geraden führen den Namen «Focalaxen des polaren Strahlenbündels». Jedoch nur zwei dieser Axen sind reell, und zwar liegen dieselben stets in einer Symmetrieebene, innerhalb der Ordnungsfläche, symmetrisch zu den Hauptaxen. Ist die Ordnungsfläche ein Rotationskegel, so fallen die beiden genannten Geraden mit der Rotationsaxe des Kegels zusammen.

Dieselben Betrachtungen, die wir bei ebenen Systemen und Strahlenbündeln angestellt, lassen sich bei einem räumlichen System wiederholen. Auch zwei reciproke räumliche Systeme können in involutorische Lage gebracht werden, so dass jeder Ebene ein Punkt, jedem Punkte eine Ebene in doppelter Weise zugewiesen ist. Fassen wir beide in einander liegenden Systeme als ein einziges auf, in dem jedem Punkte eine Ebene, jeder Geraden eine Gerade und umgekehrt entspricht, so nennt man dieses System «ein räumliches Polarsystem». Auch hier ist, wie beim ebenen System, zu unterscheiden, ob ein Punkt auf seiner entsprechenden Ebene enthalten ist oder nicht. Tritt der erste Fall ein, so gibt es eine ganze Reihe solcher Punkte, die sämmtlich auf einer Fläche zweiter Ordnung, «der Ordnungsfläche des räumlichen Polarsystems», liegen. Die Ordnungsfläche $F^2$ wird von den den Punkten entsprechenden Ebenen umhüllt.

Wie nun durch eine Curve zweiter Ordnung ein ebenes Polarsystem, durch einen Kegel ein polares Bündel völlig bestimmt war, so ist auch durch eine gegebene Fläche zweiter Ordnung ein räumliches Polarsystem völlig festgelegt. In jedem räumlichen Polarsystem gibt es unendlich viele ebene Polarsysteme und polare Strahlenbündel. Angenommen, es besässe ein räumliches Polarsystem eine Ordnungsfläche, so sind alle Tangentenkegel dieser Fläche Ordnungsflächen der Bündel, welche die Spitze des Kegels zu ihrem Mittelpunkte haben. Je zwei Ebenen oder Strahlen nun, die in Bezug auf ein Bündel, welches einem gegebenen räumlichen System angehört, conjugirt sind, müssen auch im räumlichen System einander conjugirt sein. Jedes dieser Bündel enthält, wie wir wissen, in jeder seiner Symmetrieebenen zwei Focalaxen; dieselben erscheinen also auch in Bezug auf die Ordnungsfläche $F^2$ des räumlichen Polarsystems als die Axen eines Ebenenbüschels, in welchem je zwei einander conjugirte Ebenen auf einander senkrecht stehen. Jeder Punkt des Raumes lässt sich als Mittelpunkt eines polaren Bündels auffassen; durch jeden Punkt des Raumes müssen mithin sechs Focalaxen gehen. Aber dennoch ist, wie schon hier bemerkt werden mag, die Anzahl der Focalaxen nicht, wie die Zahl der Punkte im Raume, eine dreifach unendliche, da allen Punkten einer Focalaxe diese Axe als Focalaxe eigen ist. Die Untersuchung der Klasse und Ordnung des Focalaxensystems, der gegenseitigen Lage der einzelnen Axen bei gegebener Ordnungsfläche $F^2$ eines räumlichen Polarsystemes, daneben auch ihrer Beziehungen zu den Berührungsebenen der $F^2$ ist Gegenstand dieser Abhandlung. Die Ordnungsflächen zerfallen jedoch in zwei Gruppen, nämlich in die Mittelpunktsflächen und Paraboloide. Die Aufgabe ist deshalb auch getrennt in der Weise behandelt, dass man sich zuerst das räumliche System durch eine Mittelpunktsfläche, alsdann durch ein Paraboloid festgelegt denkt.

## I. Flächen mit Mittelpunkt.

Die gegebene Fläche habe die Form

$$1) \quad F^2(\alpha, \beta, \gamma, p) \equiv A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - Dp^2 = 0,$$

in der $\alpha, \beta, \gamma, p$ homogene rechtwinklige Ebenencoordinaten sein mögen, so dass also die Relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ besteht.

Die Gleichung der Geraden laute

$$2) \quad \begin{aligned} a\alpha + b\beta - p &= 0 \\ a_1\alpha + c_1\gamma - p &= 0. \end{aligned}$$

Damit Gleichung 2 eine Focalaxe darstelle, ist, wie wir gesehen haben, erforderlich, dass je zwei Ebenen, deren Coordinaten die Gleichung 2 befriedigen und in Bezug auf die Fläche 1 einander conjugirt sind, auf einander senkrecht stehen. Gesetzt, $\alpha'\beta'\gamma'p'$ seien die Coordinaten einer Ebene, die der Gleichung 2 genügen, so lautet die Gleichung ihres Poles

$$3) \quad A\alpha'\alpha + B\beta'\beta + C\gamma'\gamma - Dp'p = 0.$$

Die Coordinaten der Ebene, die durch den Pol der Ebene $\alpha'\beta'\gamma'p'$ geht d. h. der genannten Ebene in Bezug auf die Fläche 1 conjugirt ist und zugleich die Gerade 2 enthält, finden wir durch Berechnung der Unbekannten $\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}, \frac{\gamma}{p}$ aus den Gleichungen 2 und 3

$$4) \quad \frac{\alpha}{p} = \begin{vmatrix} Dp' & B\beta' & C\gamma' \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & c_1 \end{vmatrix} : N; \quad \frac{\beta}{p} = \begin{vmatrix} A\alpha' & Dp' & C\gamma' \\ a & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & c_1 \end{vmatrix} : N; \quad \frac{\gamma}{p} = \begin{vmatrix} A\alpha' & B\beta' & Dp' \\ a & b & 1 \\ a_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} : N.$$

$$N = \begin{vmatrix} A\alpha' & B\beta' & C\gamma' \\ a & b & 0 \\ a_1 & 0 & c_1 \end{vmatrix}.$$

---

Die Ebenencoordinaten sind deshalb angewandt, weil die Resultate sich in denselben einfacher gestalten.

Die Rechtwinkligkeit zweier Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', p'$ und $\alpha'', \beta'', \gamma'', p''$ drückt die Gleichung

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0$$

aus; mithin folgt nach 4 für die Rechtwinkligkeit der in Rede stehenden Ebenen

$$5) \quad \alpha' \begin{vmatrix} Dp' & B\beta' & C\gamma' \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & c_1 \end{vmatrix} + \beta' \begin{vmatrix} A\alpha' & Dp' & C\gamma' \\ a & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & c_1 \end{vmatrix} + \gamma' \begin{vmatrix} A\alpha' & B\beta' & Dp' \\ a & b & 1 \\ a_1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 \\ A\alpha' & B\beta' & C\gamma' & Dp' \\ a & b & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach Auflösung der Determinanten und gemäss der Gleichung 2

$$\beta' = \frac{p' - a\alpha'}{b}; \quad \gamma' = \frac{p' - a_1\alpha'}{c_1}$$

gesetzt,

$$6) \quad \begin{aligned} &\alpha'^2 \left[ac_1^2 (B - A) + a_1 b^2 (C - A) + aa_1 (a - a_1) (C - B)\right] \\ &+ \alpha' p' \left[D (b^2c_1^2 + a^2c_1^2 + a_1^2b^2) - c_1^2 (B - A) - b^2 (C - A)\right. \\ &\left. - (a^2 - a_1^2) (C - B)\right] + p^2 \left[(a - a_1) (C - B) - D (ac_1^2 \right. \\ &\left. + a_1 b^2)\right] = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung 6 muss für jeden beliebigen Werth von $\frac{\alpha'}{p'}$ erfüllt sein; mithin ist nothwendig, dass jeder der Coefficienten einzeln gleich Null sei. Die Gerade 2 hat also, falls sie Focalaxe sein soll, in Bezug auf ihre Coefficienten folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$7) \quad \begin{aligned} &g) \; ac_1^2 (B - A) + a_1 b^2 (C - A) + aa_1 (a - a_1) (C - B) = 0 \\ &h) \; D (b^2c^2 + a^2c_1^2 + a_1^2b^2) - c_1^2 (B - A) - b^2 (C - A) \\ &\quad - (a^2 - a_1^2) (C - B) = 0 \\ &k) \; (ac_1^2 + a_1 b^2) D - (a - a_1) (C - B) = 0. \end{aligned}$$

Zwei Bedingungsgleichungen sind für die rechtwinklige Involution nur erforderlich; eine unserer drei Gleichungen

muss mithin Folge der beiden übrigen sein. In der That ergibt sich durch Division der Gleichungen $g$ und $k$ die dritte $h$.

Demnach folgt:

Satz 1. Jede Gerade von der Form

$$a\alpha + b\beta - p = 0$$
$$a_1\alpha + c_1\gamma - p = 0,$$

deren Constanten den Bedingungen genügen

$$7) \quad \begin{array}{l} g)\ ac_1^2(B-A) + a_1b^2(C-A) + aa_1(a-a_1)(C-B) = 0 \\ k)\ (ac_1^2 + a_1b^2)D - (a-a_1)(C-B) = 0, \end{array}$$

ist Focalaxe der Fläche

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - Dp^2 = 0.$$

Sollen zwei Flächen zweiter Ordnung dasselbe Focalaxensystem besitzen, so müssen die Constanten der beiden Flächen so beschaffen sein, dass unsere Bedingungsgleichungen durch sie keinerlei Aenderungen erfahren. Angenommen,

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - Dp^2 = 0$$
$$A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 - D'p^2 = 0$$

seien die Gleichungen zweier Flächen mit demselben Focalaxensystem, so muss also nach 7

$$\frac{(C-A)}{(C'-A')} = \frac{(A-B)}{(A'-B')} = \frac{(B-C)}{(B'-C')} = \frac{D}{D'} = K\,(=1)$$

sein, wo $K$ unbeschadet der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden darf. Die Constanten $A', B', C'$ unterscheiden sich mithin von $A, B, C$ nur um dieselbe Grösse $\lambda$, so dass unsere Flächen lauten

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - Dp^2 = 0$$
$$(A+\lambda)\alpha^2 + (B+\lambda)\beta^2 + (C+\lambda)\gamma^2 - Dp^2 = 0.$$

Flächen dieser Art bezeichnet man als confocale; somit ergibt sich

Satz 2. Alle confocalen Flächen $F^2$ besitzen dasselbe System von Focalaxen.

Bestimmen wir jetzt die Klasse und Ordnung des Focalaxensystems.

Sei

$$2) \quad \begin{aligned} a\alpha + b\beta - p &= 0 \\ a_1\alpha + c_1\gamma - p &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichung unserer Geraden; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $p$ die homogenen Coordinaten einer bestimmten Ebene, die der Gleichung 2 genügen. Die Bedingungsgleichungen, welche unsere Gerade zu erfüllen hat, damit sie Focalaxe sei, lauten

$$7) \quad \begin{aligned} &g) \; ac_1^2(B-A) + a_1b^2(C-A) + aa_1(a-a_1)(C-B) = 0 \\ &h) \; (ac_1^2 + a_1b^2)D - (a-a_1)(C-B) = 0. \end{aligned}$$

Führen wir aus 2 die Werthe von $a$ und $a_1$ in 7 ein, so folgt

$$\begin{aligned} &-(p-b\beta)c_1^2[\alpha^2(A-B)+\gamma^2(C-B)]-(p-c_1\gamma)b^2 \\ &[\alpha^2(A-C)+\beta^2(B-C)] + p^2(c_1\gamma-b\beta)(C-B) = 0 \\ &-[(p-b\beta)c_1^2+(p-c_1\gamma)b^2]D + (c_1\gamma-b\beta)(C-B) = 0. \end{aligned}$$

Die Elimination des Gliedes $(c_1\gamma - b\beta)(C-B)$ liefert

$$\begin{aligned} &(p-b\beta)c_1^2[\alpha^2(A-B) + \gamma^2(C-B) - Dp^2] + (p-c_1\gamma)b^2 \\ &\qquad [\alpha^2(A-C) + \beta^2(B-C) - Dp^2] = 0 \end{aligned}$$

oder

$$ac_1^2 M + a_1b^2 N = 0.$$

Demgemäss gehen unsere Bedingungsgleichungen in folgende über

$$\begin{aligned} &ac_1^2[(B-A)N - (C-A)M] + aa_1(a-a_1)N(C-B) = 0 \\ &ac_1^2 D[N-M] \qquad\qquad - (a-a_1)(C-B)N = 0. \end{aligned}$$

Da aber $(B-A)N - (C-A)M = (B-C)$
$[\beta^2(B-A) + \gamma^2(C-A) - Dp^2] = (B-C)Q,$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} +ac_1^2 Q &= aa_1(a-a_1)N \\ -ac_1^2 D &= \quad (a-a_1)N \end{aligned}$$

$$aa_1 = -\frac{Q}{D}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$8) \quad a_1^2 D\,[\alpha^2 Q + \gamma^2 N] - 2\,\alpha p\, D\, Q a_1 + Q\,[Dp^2 + \gamma^2 N] = 0.$$

Die vorliegende Gleichung ist in Bezug auf $a$ vom zweiten Grade, d. h. in keiner Ebene sind mehr als zwei Focalaxen möglich.

Diese soeben aufgestellte Behauptung bedarf jedoch noch einer Ergänzung. Nach Satz 2 wissen wir, allen confocalen Flächen d. h. allen Flächen von der Form

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - Dp^2 + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

ist dasselbe Focalaxensystem eigen. Nähert sich $\lambda$ einer der Constanten $-A, -B, -C$, so geht obige Gleichung in die Gleichung der Grenzflächen oder Focalcurven über, welche lauten:

$$(A - C)\alpha^2 + (B - C)\beta^2 - Dp^2 = 0 = N$$
$$(A - B)\alpha^2 + (C - B)\gamma^2 - Dp^2 = 0 = M$$
$$(B - A)\beta^2 + (C - A)\gamma^2 - Dp^2 = 0 = Q.$$

Geben wir den Coordinaten einer Ebene solche Werthe, dass eine der obigen Gleichungen, etwa $N$, erfüllt ist, so folgt aus 8

$$a_1 = \frac{p}{\alpha}.$$

Die beiden Focalaxen einer Tangentialebene der Focalcurven fallen also zusammen, und zwar ist die sich ergebende Gerade

$$a_1\alpha = p;\ b\beta = p$$

Tangente der Curve und liegt demgemäss mit der Curve in derselben Symmetrieebene. Daraus folgt, der Berührungspunkt ist der Mittelpunkt eines Bündels, dessen Ordnungsfläche ein Rotationskegel ist, da die beiden in seiner Symmetrieebene möglichen Focalaxen in eine einzige, die Rotationsaxe, zusammengefallen sind. [Die Symmetrieebene wird natürlich beim Rotationskegel unbestimmt.] Somit können wir zu der Behauptung, eine Ebene enthalte zwei Focalaxen, ergänzend hinzufügen: Die Tangenten der Focalcurven sind Focalaxen.

Um die Ordnung des Focalaxensystems kennen zu lernen, wollen wir von der Punktgleichung

$$9) \quad x\alpha + y\beta + z\gamma - p = 0$$

ausgehen. Damit der Punkt 9 auf der Geraden

$$2) \quad \begin{aligned} a\alpha + b\beta - p &= 0 \\ a_1\alpha + c_1\gamma - p &= 0 \end{aligned}$$

enthalten ist, muss für jeden Werth von $\frac{\alpha}{p}$ die Gleichung

$$\alpha[xbc_1 - yac_1 - za_1b] - p[bc_1 - yc_1 - zb] = 0$$

erfüllt sein, d. h. Zähler und Nenner des Ausdrucks

$$\frac{bc_1 - yc_1 - zb}{xbc_1 - yac_1 - za_1b}$$

müssen für sich verschwinden. Unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen 7 $g$ und $h$ erhalten wir mithin zur Bestimmung der Anzahl der durch den Punkt 9 möglichen Focalaxen die vier Gleichungen

$$10) \quad \begin{cases} bc_1 - yc_1 - zb = 0 \\ xbc_1 - yac_1 - za_1b = 0 \\ ac_1^2(B-A) + a_1b^2(C-A) + aa_1(a-a_1)(C-B) = 0 \\ ac_1^2D + a_1b^2D - (a-a_1)(C-B) = 0, \end{cases}$$

aus denen folgt

$$11) \quad \begin{aligned} z^2D[(x-a_1)^2(B-A) - a_1^2y^2D][a_1^2D + (B-A)][y^2 - (x-a_1)^2] \\ + [y^2(a^2D + B - A) + (B-C)\{y^2 - (x-a_1)^2\}] \\ + [a_1y^2D + (x-a_1)(axD + B - A)]^2 = 0, \end{aligned}$$

eine Gleichung, die in Bezug auf die Unbekannte $a_1$ vom sechsten Grade ist, d. h. durch den Punkt 9 sind sechs Focalstrahlen denkbar.

Die gewonnenen Resultate wollen wir kurz zusammenfassen als

Satz 3. Die Focalaxen einer gegebenen Fläche $F^2$ bilden ein System zweiter Klasse und sechster Ordnung.

Wenden wir uns jetzt zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Focalaxen, so lässt sich zunächst der Satz aufstellen:

Satz 4. Ein Ellipsoid und zweischaliges Hyperboloid wird von allen seinen reellen Focalaxen geschnitten.

Denken wir uns nämlich von irgend einem Punkte der Focalaxe aus einen Tangentenkegel construirt, so muss die Focalaxe im Innern dieses Kegels liegen, wie wir aus den Betrachtungen in der Einleitung wissen, d. h. die Focalaxe muss die gegebene Fläche schneiden.

Nach dem Besprochenen liegt die Frage nahe, in welcher Beziehung stehen die reellen Focalaxen zur dritten Flächenschaar, zu den einschaligen Hyperboloiden.

Satz 2 lehrt uns, dass allen confocalen Flächen dasselbe Focalaxensystem zukommt; ferner ist bekannt, dass je zwei Ebenen, also auch zwei senkrechte Ebenen, die sich in einem Strahle eines einschaligen Hyperboloides schneiden, in Bezug auf diese Fläche conjugirt sind. Mithin sehen wir, dass die durch einen Punkt $S$ möglichen reellen Focalaxen identisch sind mit den Erzeugenden des einschaligen Hyperboloides, welches durch $S$ geht und zur gegebenen $F^2$ confocal ist[1].

Denken wir uns nun die zu einer Fläche durch einen Punkt $S$ möglichen drei confocalen Flächen gegeben nebst dem Tangentenkegel von $S$ an die ursprüngliche Fläche, so sind die drei durch $S$ an die confocalen Flächen möglichen Tangentenebenen Symmetrieebenen des Kegels $S$. Jede dieser Ebenen schneidet die zugehörige Fläche in zwei Geraden, von denen natürlich nur die Schnittlinien des einschaligen Hyperboloides reell sind. In diesen letzteren haben wir soeben die beiden durch $S$ möglichen reellen Focalaxen erkannt; die Schnittlinien der beiden andern Tangentialebenen werden wir demgemäss als die vier imaginären Focalaxen des Punktes $S$ auffassen können.

---

1. Dieser Satz wurde zuerst von Jacobi ohne Beweis mitgetheilt. Crelle, Bd. 12, p. 137.

Nach der Einleitung wissen wir, dass allen Tangentenkegeln, deren Scheitel auf einer und derselben Focalaxe liegen, diese Focalaxe gemeinsam ist. Vertauschen wir demnach den früher angenommenen Punkt $S$ der Reihe nach mit allen Punkten einer Erzeugenden, so bilden offenbar die sämmtlichen reellen Focalaxen, die den ersteren schneiden, die eine Regelschaar eines einschaligen Hyperboloides, das zur gegebenen $F^2$ confocal ist. Durchläuft der Punkt $S$ der Reihe nach alle Punkte einer Erzeugenden dieser Regelschaar, so erhalten wir die andere Regelschaar desselben Hyperboloides. Die diesen reellen Axen entsprechenden imaginären liegen auf den durch die Punkte $S$ gehenden confocalen Ellipsoiden und zweischaligen Hyperboloiden.

Daraus folgt:

Satz 5. Alle einer Fläche zweiter Ordnung $F^2$ angehörigen Focalaxen liegen auf den zur $F^2$ confocalen Flächen, die $F^2$ selbst mit eingeschlossen, und zwar die reellen auf den geradlinigen, die imaginären auf den übrigen confocalen Flächen.

Haben uns die letzten Betrachtungen nochmals den Beweis geliefert, dass unser Axensystem ein System der sechsten Ordnung ist, da ja durch jeden Punkt drei confocale Flächen möglich sind, die von ihren Tangentialebenen in eben diesem Punkte in je zwei reellen oder imaginären Axen geschnitten werden, so folgt aus dem Umstande, dass die für die confocalen Flächen aufgestellte Gleichung

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - Dp^2 + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

in Bezug auf $\lambda$ vom ersten Grade ist, d. h. dass unter allen confocalen Flächen nur eine einzige existirt, welche eine gegebene Ebene berührt, ein nochmaliger Beweis für die Klasse des Systems. Denn sollten in einer Ebene mehr als zwei Focalaxen möglich sein, so müsste unsere Gleichung offenbar von höherem Grade in $\lambda$ sein.

Untersuchen wir jetzt, welche Modifikationen erleiden die von uns aufgestellten Sätze bei den Rotationsflächen.

Die gegebene Rotationsfläche sei von der Form

$$F^2(\alpha, \beta, \gamma, p) \equiv A\alpha^2 + B(\beta^2+\gamma^2) - Dp^2 = 0, \quad [B = C],$$

so gehen unsere Bedingungsgleichungen 7 in folgende über

$$\begin{aligned} &g)\ ac_1^2 + a_1b^2 = 0 \\ 7')\ &h)\ D(b^2c^2 + a^2c_1^2 + a_1^2b^2) - (c^2+b^2)(B-A) = 0 \\ &k)\ ac_1^2 + a_1b^2 = 0. \end{aligned}$$

Demgemäss wird aus 8

$$\begin{aligned} 8')\ & a_1^2D[\alpha^2\{(B-A)(\beta^2+\gamma^2) - Dp^2\} + \gamma^2\{(A-B)\alpha^2 - Dp^2\}] \\ & -2\alpha pD[(B-A)(\beta^2+\gamma^2) - Dp^2]a_1 + [(B-A)(\beta^2+\gamma^2) - Dp^2] \\ & [Dp^2 + \gamma^2[(A-B)\alpha^2 - Dp^2]] = 0 \end{aligned}$$

und aus 11

$$\begin{aligned} 11')\ & [a^2D - (A-B)]z^2D[y^2 - (x-a_1)^2][(x-a_1)^2(B-A) - a^2y^2D] \\ & + [a^2D - (A-B)]y^2[a_1y^2D + (x-a_1)\{axD + (B-A)\}]^2 = 0, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass das der $F^2$ zugehörige Axensystem ein System zweiter Klasse bleibt, während aus einem System sechster Ordnung ein System vierter Ordnung nebst zwei Strahlenbündeln $\left[a = \pm\sqrt{\frac{A-B}{D}}\right]$ wird. Alle reellen Focalaxen liegen natürlich auch hier auf der zur $F^2$ confocalen geradlinigen Flächenschaar, während die imaginären nach wie vor auf den übrigen Flächen enthalten sind. Bei den Rotationsflächen zerfällt aber stets die eine Schaar der confocalen; jedoch arten auch die Focalcurven aus, und zwar gehen die früher aufgestellten Gleichungen über in

$$\begin{aligned} &(A-B)\alpha^2 - Dp^2 = 0 \qquad N \\ &(A-B)\alpha^2 - Dp^2 = 0 \qquad M \\ &(B-A)(\beta^2+\gamma^2) - Dp^2 = 0 \quad Q. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen stellen uns ein und dasselbe Punktepaar dar, und zwar erkennen wir in diesen Punkten die reellen oder imaginären Brennpunkte des Kegel-

schnittes, durch dessen Rotation die Fläche entstanden, während wir in der letzten Gleichung einen imaginären resp. reellen Kreis vor uns haben, der in einer der Symmetrieebenen $(\beta, \gamma)$ enthalten ist.

In Bezug auf unsere Fläche $F^2$ haben wir folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $0<A<B$; 2) $0<B<A$; 3) $0<B=A$. [Stets sei $D>0$]

Im ersten Falle $O < A < B$ stellt die Gleichung unserer $F^2$ ein sogenanntes «abgeplattetes Ellipsoid» dar, zu welchem reelle einschalige Hyperboloide confocal sind, während die Schaar der confocalen zweischaligen Hyperboloide ausgeartet ist. Unsere Focalcurven bestehen aus einem reellen Kreise und zwei imaginären Punkten. Da wir von früher wissen, dass die Tangenten der Focalcurven Focalaxen sind, so erscheinen die imaginären Brennpunkte als Mittelpunkte eines imaginären rechtwinkligen Bündels, d. h. alle durch die Brennpunkte des Kegelschnitts, durch dessen Rotation die Fläche entstanden, gehenden imaginären Geraden sind Focalaxen der Fläche. Die beide imaginären Brennpunkte verbindende Gerade, die Rotationsaxe, ist eine reelle Focalaxe der Fläche.

Im Falle $O < B < A$ führt die Fläche den Namen «gestrecktes Ellipsoid», zu welchem reelle zweischalige Hyperboloide confocal sind; auf beiden Flächenschaaren sind also unsere imaginären Axen gelegen. Das einschalige Hyperboloid ist ausgeartet. Doch zeigen uns die Gleichungen unserer Focalcurven, dass unsere Brennpunkte jetzt Mittelpunkte reeller rechtwinkliger Strahlenbündel sind, d. h. dass jede durch den Brennpunkt gehende Gerade eine reelle Focalaxe der gegebenen $F^2$ ist.

Dass diese Focalaxen auch die einzigen reellen der $F^2$ sind, folgt aus dem Umstande, dass sich die beiden Verbindungslinien irgend eines Punktes im Raume mit den Brennpunkten als die reellen Focalaxen der Kegelfläche erweisen, welche von diesem Punkte aus der Fläche umschrieben werden kann.

Es bleibt noch der Fall $O < A = B$, in welchem obige

Gleichung eine Kugel darstellt. Die Gleichungen unserer drei Focalcurven erscheinen in der Form $p^2 = o$, welche uns den Mittelpunkt der Kugel liefert. Alle durch den Mittelpunkt gehenden Geraden sind also Focalaxen der Fläche, und zwar reelle Focalaxen, weil sämmtliche Tangentenkegel der Fläche Rotationskegel und die Verbindungslinien der Spitzen der Kegel mit dem Kugelmittelpunkt Rotationsaxen sind. Fassen wir die gewonnenen Resultate kurz zusammen als

Satz 6. Die reellen Focalaxen eines abgeplatteten Ellipsoides sind auf den zur Fläche confocalen einschaligen Hyperboloiden enthalten; jede durch den Brennpunkt eines gestreckten Ellipsoides oder zweischaligen Rotationshyperboloides gehende Gerade, aber auch nur diese, ist eine reelle Focalaxe der Fläche.

Zum Schluss wollen wir noch die Gleichungen der Focalaxen eines gegebenen Kegels aufstellen. Da man jedoch, um einen Kegel in Ebenencoordinaten auszudrücken, zweier Gleichungen bedarf, so sei bei den folgenden Betrachtungen stets $p = 0$ vorausgesetzt. Somit haben wir in der Gleichung

$$F^2(\alpha\beta\gamma) \equiv A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

dem Früheren analog confocale Kegelflächen, deren Focalcurven lauten

$$(A - C)\alpha^2 + (B - C)\beta^2 = 0$$
$$(A - B)\alpha^2 + (C - B)\beta^2 = 0$$
$$(B - A)\beta^2 + (C - A)\gamma^2 = 0.$$

Die Gleichungen der Focalcurven repräsentiren sechs gerade Linien, von denen zwei, die Asymptoten der Focalhyperbel, reell sind. Aus dem Früheren folgt, dass diese erhaltenen Geraden die Focalaxen aller Kegel von der Form

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

sein müssen.

Suchen wir jetzt die Beziehungen auf, welche zwischen den Focalaxen und Berührungsebenen bestehen. Zunächst

wissen wir, dass jede Berührungsebene einer Fläche im Allgemeinen zwei Focalaxen enthält, die wir als die Schnittlinien der Ebene mit der Fläche erkannt haben. Um uns noch einmal zu vergewissern, in welchem Falle unsere Schnittlinien reell sind, wollen wir die Constanten in der Gleichung derselben bestimmen, indem wir von 8 ausgehen

$$8)\quad a_1^2 D(\alpha^2 Q + \gamma^2 N) - 2\alpha p D Q a_1 + Q[Dp^2 + \gamma^2 N] = 0.$$

Da jedoch

$$Q = \beta^2 (B - A) + \gamma^2 (C - A) - Dp^2 = F^2 - A(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

und

$$N = \alpha^2 (A - C) + \beta^2 (B - C) - Dp^2 = F^2 - C(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

so erhalten wir

$$a_1^2 D[\alpha^2 (F^2 - A) + \gamma^2 (F^2 - C)] - 2\alpha p D a_1 [F^2 - A] + (F^2 - A)[Dp^2 - \gamma^2 (F^2 - C)] = 0.$$

Die Coordinaten unserer Ebene sollen der Gleichung der $F^2$ genügen; mithin folgt:

$$a_1^2 - 2\alpha p a_1 \frac{A}{\alpha^2 A + \gamma^2 C} + \frac{A}{D} \cdot \frac{(Dp^2 - \gamma^2 C)}{\alpha^2 A + \gamma^2 C} = 0$$

oder

$$a_1 = \frac{\alpha p A}{\alpha^2 A + \gamma^2 C} \pm \frac{\beta\gamma}{\alpha^2 A + \gamma^2 C} \sqrt{-\frac{ABC}{D}}.$$

Setzen wir $D$ stets positiv voraus, so ist ersichtlich, dass unsere Wurzel nur reelle Werthe besitzt, wenn eine der Constanten $A$, $B$, $C$ negativ ist, d. h. dass die durch $F^2$ dargestellte Gleichung ein einschaliges Hyperboloid ist.

Nach den einleitenden Betrachtungen wissen wir, dass je zwei Ebenen, die in Bezug auf ein Bündel, welches einem räumlichen Polarsystem angehört, conjugirt sind, im räumlichen System selbst einander conjugirt sein müssen. Daher dürfen wir die über die Focalaxen und Berührungsebenen gültigen Sätze ohne Weiteres auf unsere Flächen übertragen. Dem bekannten Satze:

«Wird die Schnittlinie von zwei Berührungsebenen der Kegelfläche verbunden mit den Focalaxen, so bildet die eine Verbindungsebene mit der einen Berührungsebene denselben Winkel, wie die andere mit der andern[1].»

würde etwa folgender entsprechen:

Satz 7. Verbindet man die Schnittlinie $g$ zweier Berührungsebenen mit einem beliebigen Paar, die Schnittlinie in einem Punkte $S$ treffenden, Focalaxen, so bildet die eine Verbindungsebene mit der einen Berührungsebene denselben Winkel, wie die andere mit der andern.

Denken wir uns die eine Regelschaar eines zur Fläche confocalen einschaligen Hyperboloides gegeben, nebst einem Strahle $s$ der andern Regelschaar, so wird:

Jede Berührungsebene $\Sigma$ der gegebenen Fläche, welche den Strahl $s$ im Punkte $S$ treffen möge, mit der durch $s$ und die von $S$ aus in $\Sigma$ an die Fläche mögliche Tangente gelegten Ebene denselben Winkel bilden, wie mit der Ebene, welche die durch $S$ gehende Focalaxe der andern Regelschaar mit derselben Tangente verbindet,

analog dem Satze:

«Jede Berührungsebene der Kegelfläche bildet gleiche Winkel mit denjenigen beiden Ebenen, welche den Berührungsstrahl mit den beiden Focalaxen verbinden[2].»

## II. Die Paraboloide.

Angenommen, die Gleichung einer parabolischen Fläche sei von der Form

$$1) \quad F^2(\alpha, \beta, \gamma, p) \equiv A\alpha^2 + B\beta^2 - 2\gamma p = 0,$$

so lautet die Gleichung der zur Fläche 1 confocalen Flächen

$$2) \quad (A+\lambda)\alpha^2 + (B+\lambda)\beta^2 + \lambda\gamma^2 - 2\gamma p = 0.$$

---

1. Reye, *Geometrie der Lage*, II, p. 232 [1868, 1. Aufl.].
2. Reye, *Geometrie der Lage*, II, p. 232.

Seien $\alpha'\beta'\gamma'p'$ die bestimmten Coordinaten einer Ebene, so sind die Pole derselben in Bezug auf alle confocalen Flächen dargestellt durch die Gleichung

$$3)\quad (A+\lambda)\alpha'\alpha+(B+\lambda)\beta'\beta+(\lambda\gamma'-p')\gamma-\gamma'p=0.$$

Die Coordinaten der Ebene, die die Gerade

$$4)\quad \begin{matrix}\alpha = c\gamma + ap\\ \beta = c_1\gamma + bp\end{matrix}$$

enthält und die Gleichung 3 befriedigt, finden wir durch Elimination der Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, p$ aus 3 und 4

$$\frac{\alpha}{p}=\begin{vmatrix}\gamma' & (B+\lambda)\beta' & \lambda\gamma'-p'\\ a & 0 & -c\\ b & 1 & -c_1\end{vmatrix} : N;\quad \frac{\beta}{p}=\begin{vmatrix}(A+\lambda)\alpha' & \gamma' & \lambda\gamma'-p'\\ 1 & a & -c\\ 0 & b & -c_1\end{vmatrix} : N;$$

$$\frac{\gamma}{p}=\begin{vmatrix}(A+\lambda)\alpha' & (B+\lambda)\beta' & \gamma'\\ 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\end{vmatrix} : N;\quad N=\begin{vmatrix}(A+\lambda)\alpha' & (B+\lambda)\beta' & \lambda\gamma'-p'\\ 1 & 0 & -c\\ 0 & 1 & -c_1\end{vmatrix}$$

gesetzt. Setzen wir voraus, dass die Coordinaten der Ebene $\alpha', \beta', \gamma', p'$ der Gleichung 4 genügen, so wird die durch 4 dargestellte Gerade eine Focalaxe sein, wenn die Bedingung

$$\frac{\alpha'}{p'}\cdot\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta'}{p'}\cdot\frac{\beta}{p}+\frac{\gamma'}{p'}\cdot\frac{\gamma}{p}=0$$

erfüllt ist. Führen wir für $\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}, \frac{\gamma}{p}$ obige Werthe ein, so erhalten wir

$$\alpha'\begin{vmatrix}\gamma' & (B+\lambda)\beta' & \lambda\gamma'-p'\\ a & 0 & -c\\ b & 1 & -c_1\end{vmatrix}+\beta'\begin{vmatrix}(A+\lambda)\alpha' & \gamma' & \lambda\gamma'-p'\\ 1 & a & -c\\ 0 & b & -c_1\end{vmatrix}$$

$$+\gamma'\begin{vmatrix}(A+\lambda)\alpha' & (B+\lambda)\beta' & \gamma'\\ 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix}\alpha' & \beta' & \gamma' & 0\\ (A+\lambda)\alpha' & (B+\lambda)\beta' & \lambda\gamma'-p' & \gamma'\\ 1 & 0 & -c & a\\ 0 & 1 & -c_1 & b\end{vmatrix}=0,$$

---

1. Die Gleichung der Geraden 4 ist in dieser Form gewählt, weil sich die später folgenden Formeln leichter aus denselben ergeben.

oder aufgelöst und für

$$\alpha' = c\gamma' + ap'$$
$$\beta' = c_1\gamma' + bp'$$

gesetzt,

$$\gamma'^2\,[(B-A)\,(ac_1 - cb)\,cc_1 - acA - bc_1B + 1 + c^2 + c_1^2]$$
$$+ \gamma' p'\,[(B-A)\,(a^2c_1^2 - b^2c^2) - a^2A - b^2B]$$
$$+ p'^2\,[(B-A)\,(ac_1 - cb)\,ab - a^2 - b^2] = 0.$$

Diese Gleichung muss für jeden Werth von $\frac{\gamma'}{p'}$ erfüllt sein, d. h. die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\frac{\gamma}{p}$ müssen einzeln der Null gleich sein. Somit folgt

$$5)\quad \begin{aligned} &g)\ (B-A)\,(ac_1 - bc)\,cc_1 - acA - bc_1B + 1 + c^2 + c_1^2 = 0\\ &h)\ (B-A)\,(a^2c_1^2 - c^2b^2) - a^2A - b^2B = 0\\ &k)\ (B-A)\,(ac_1 - bc)\,ab - a^2 - b^2 = 0. \end{aligned}$$

Wie bei den Mittelpunktsflächen muss natürlich auch hier eine der Gleichungen Folge der beiden übrigen sein, da ja für eine rechtwinklige Involution nur zwei Bedingungsgleichungen erforderlich sind. Die Division der beiden Gleichungen $h$ und $k$ ergibt daher auch hier die gesuchte Gleichung $g$.

Demgemäss folgt:

Satz 1. Jede Gerade von der Form

$$\alpha = c\gamma + ap$$
$$\beta = c_1\gamma + bp,$$

deren Constanten den Bedingungen

$$5)\quad \begin{aligned} &h)\ (B-A)\,(a^2c_1^2 - c^2b^2) = a^2A + b^2B\\ &k)\ (B-A)\,(ac_1 - cb)\,ab = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

genügen, ist eine Focalaxe der Fläche

$$A\alpha^2 + B\beta^2 - 2\gamma p + \lambda\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0.$$

In unseren Bedingungsgleichungen tritt die Grösse $\lambda$ nicht auf; mithin erhalten wir

Satz 2. Allen confocalen Flächen zweiter Ordnung $F^2$ ist dasselbe Focalaxensystem eigen.

Die Klasse des Systems finden wir aus den Bedingungsgleichungen

$$5)\quad \begin{array}{l} h)\ (B-A)\,(a^2c_1^2-c^2b^2) = a^2A + b^2B \\ k)\ (B-A)\,(ac_1-bc)\,ab = a^2+b^2 \end{array}$$

und den Gleichungen unserer Geraden

$$4)\quad \begin{array}{l} \alpha = c\gamma + ap \\ \beta = c_1\gamma + bp, \end{array}$$

in der wir unter $\alpha, \beta, \gamma, p$ die Coordinaten einer bestimmten Ebene verstehen wollen. Führen wir die Werthe für $c$ und $c_1$, aus 4 in 5 ein, so folgt

$$(B-A)\,(a\beta - b\alpha)\,ab - \gamma\,(a^2+b^2) = 0$$
$$[(B-A)\,\beta^2 - A\gamma^2]\,a^2 + [(A-B)\,\alpha^2 - B\gamma^2]\,b^2 - 2p\,(B-A)\,(a\beta - b\alpha)\,ab = 0;$$

die Division liefert

$$a^2\,[(B-A)\,\beta^2 - A\gamma^2 - 2\gamma p] + b^2\,[(A-B)\,\alpha^2 - B\gamma^2 - 2\gamma p] = a^2N + b^2Q = 0,$$

woraus sich in Verbindung mit der ersten Gleichung

$$a^2\,[(B-A)\,b\beta - \gamma] = b^2\,[(B-A)\,a\alpha + \gamma]$$

ergibt
$$a\alpha N + b\beta Q + \gamma = 0,$$

mithin
$$6)\quad b^2Q\,[\alpha^2N + \beta^2Q] + 2b\beta\gamma Q + \gamma^2 = 0.$$

Die gefundene Gleichung lehrt uns, dass das Axensystem ein System zweiter Klasse ist. Bei den Mittelpunktsflächen fanden wir, dass die Symmetrieebenen der Fläche unendlich viele Focalaxen enthielten. Suchen wir deshalb auch hier die in den Symmetrieebenen existirenden Focalcurven der Flächen

$$A\alpha^2 + B\beta^2 - 2\gamma p + \lambda\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = 0$$

auf, so finden wir

$$\begin{array}{l} a)\ (B-A)\,\beta^2 - \gamma\,(A\gamma + 2p) = 0 = N \\ b)\ (A-B)\,\alpha^2 - \gamma\,(B\gamma + 2p) = 0 = Q, \end{array}$$

Ausdrücke, die wir soeben kennen gelernt. Angenommen, die Coordinaten einer Ebene $\alpha', \beta', \gamma', p'$ befriedigen eine der Gleichungen, etwa $b$, so geht die Gleichung

$$a\alpha' N + b\beta' Q + \gamma' = 0$$

über in

$$a\alpha' (A - B) = \gamma' \quad ; \quad a = \frac{\gamma'}{\alpha' (A - B)} .$$

Die Gleichung des Berührungspunktes einer Tangentialebene $(\alpha' \beta' \gamma' p')$ der Focalcurve $b$ lautet

$$(A - B)\, \alpha' \alpha = \gamma (B\gamma' - p') + \gamma' p .$$

Vergleichen wir den Coefficienten von $\alpha$ mit dem soeben für $a$ gefundenen Werth, so erkennen wir in dem Bildpunkte $\alpha = c\gamma + ap$ der Geraden 4 den Berührungspunkt der Curve $b$; mithin in der Geraden selbst eine Tangente der Curve; denn die Gerade ist ja in allen Tangentenebenen $\alpha' \beta' \gamma' p'$ enthalten, liegt also mit der Curve in einer Ebene. In genannter Tangentialebene haben wir folglich nur eine einzige Focalaxe, d. h. der Berührungspunkt ist Mittelpunkt eines polaren Bündels, dessen Ordnungsfläche ein Rotationskegel ist. Die Focalaxe selbst ist also Rotationsaxe.

Was die Ordnung des Systems betrifft, so wollen wir von der Punktgleichung

$$a) \quad x\alpha + y\beta + z\gamma - p = 0$$

ausgehen. Soll der Punkt $a$ auf der Geraden

$$4) \quad \begin{aligned} \alpha &= c\gamma + ap \\ \beta &= c_1\gamma + bp \end{aligned}$$

liegen, so muss die Gleichung

$$x (c\gamma + ap) + y (c_1\gamma + bp) + z\gamma - p = 0$$

für jeden Werth von $\frac{\gamma}{p}$ erfüllt sein.

Wir erhalten deshalb zur Bestimmung der Anzahl der durch den Punkt $a$ möglichen Focalaxen folgende vier Bedingungsgleichungen

$$(B-A)(a^2c_1^2-b^2c^2)=a^2A+b^2B$$
$$(B-A)(ac_1-bc)ab=a^2+b^2$$
$$1-ax-by=0$$
$$z+cx+c_1y=0,$$

aus denen sich die Gleichung sechsten Grades ergibt

$$7)\quad b^2(1-by)^2(B-A)\{(1-by)^2(A+2z)+b^2x^2(B+2z)\}$$
$$=(1-2by)[(1-by)^2+b^2x^2]^2,$$

d. h. unser Focalaxensystem ist ein System sechster Ordnung. Fassen wir nun die gewonnenen Resultate kurz zusammen als

Satz 3. Die Focalaxen einer $F^2$ bilden ein System sechster Ordnung und zweiter Klasse.

Die Gleichung unserer Fläche

$$A\alpha^2+B\beta^2-2\gamma p+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0$$

zeigt, dass an eine Ebene nur eine einzige, zu einer gegebenen $F^2$ confocale, berührende Fläche gelegt werden kann. Denken wir uns die eine bestimmte Ebene berührende Fläche in der Form $A\alpha^2+B\beta^2-2\gamma p=O$ gegeben, so folgt für unsere Constante $b$ aus der Gleichung

$$b^2Q\{\alpha^2N+\beta^2Q\}+2b\beta\gamma Q+\gamma^2=0$$

unter Berücksichtigung, dass $N=F^2-A$, $Q=F^2-B$ $[F^2\equiv A\alpha^2+B\beta^2-2\gamma p]$,

$$b=\frac{\beta}{2p}\pm\frac{\alpha}{2p}\sqrt{-\frac{A}{B}},$$

d. h. die in einer Berührungsebene einer $F^2$ enthaltenen Focalaxen sind nur reell, wenn $A$ und $B$ verschiedene Vorzeichen besitzen. Die Fläche selbst muss also ein hyperbolisches Paraboloid sein. Bei den Mittelpunktsflächen erkannten wir die Focalaxen einer Ebene als die Schnittlinien dieser Ebene mit der sie berührenden Fläche $F^2$. Die zum Beweise nöthigen Sätze haben auch bei den Paraboloiden

völlige Gültigkeit, so dass wir ohne Weiteres den Satz aufstellen können:

Satz 4. Die sämmtlichen Focalaxen einer $F^2$ liegen auf den zur $F^2$ confocalen Flächen, die $F^2$ selbst eingeschlossen; und zwar die reellen auf den confocalen geradlinigen, die imaginären auf den übrigen Flächen.

Geht das Paraboloid in die Rotationsfläche

$$A(\alpha^2 + \beta^2) - 2\gamma p = 0$$

über, so vereinfachen sich demgemäss auch die Gleichungen 5, 6 und 7. Jedoch auch unsere Focalcurven arten aus, und zwar erkennen wir in ihnen

$$\gamma(A\gamma + 2p) = 0$$
$$\gamma(A\gamma + 2p) = 0$$

die beiden Brennpunkte des Kegelschnitts, durch dessen Rotation die Fläche entstanden. Einer dieser Brennpunkte liegt im Unendlichen, aber dennoch erscheinen beide als Mittelpunkte eines rechtwinkligen polaren Bündels d. h. die beiden Verbindungslinien irgend eines Punktes im Raume mit den Brennpunkten eines Rotationsparaboloides sind reelle Focalaxen der Fläche.

Fassen wir das Resultat kurz zusammen als

Satz 5. Alle durch den Brennpunkt eines Rotationsparaboloides gehenden Geraden nebst den sämmtlichen Durchmessern der Fläche sind reelle Focalaxen der $F^2$.

Die bei den Mittelpunktsflächen über die Beziehungen zwischen Focalaxe und Berührungsebene aufgestellten Sätze haben offenbar auch bei den Paraboloiden völlige Gültigkeit, und können wir somit auf obige Sätze verweisen.